

## Efectos del sistema multifondos en el Régimen de Ahorro Individual en Colombia

Carlos Andrés Hernández García\*

Universidad del Rosario, Colombia.

Recibido: ? – Aprobado: ?

**Resumen.** Con el fin de analizar los posibles efectos de una reforma financiera dirigida a flexibilizar la regulación de los Fondos de Pensiones en Colombia, este documento evalúa los potenciales efectos de esta reforma sobre el bienestar de los agentes, aplicando el supuesto de individuos con funciones de utilidad con aversión absoluta al riesgo constante (CARA) y la Teoría de Diversificación del Portafolio. Adicionalmente se presenta un ejercicio contrafactual para estimar el valor del activo pensional si los principios de esta legislación hubiesen sido aplicados en el período 1980-2009. Los resultados del análisis teórico sugieren que ante un mayor valor acumulado en las cuentas de pensión, los individuos disminuyen su exposición ante el riesgo en sus portafolios. Mientras que el ejercicio contrafactual indica que la mejor decisión para los individuos habría sido invertir todo el portafolio en activos de renta variable.

**Palabras clave:** Sistema de pensiones, sistema multifondos, Teoría de Diversificación del portafolio, función de utilidad CARA.

**Clasificación JEL:** D91, G11, G23, G31.

**Abstract.** In order to analyze the potential effects of a financial reform aimed to provide more flexibility to Colombian Pension Funds' regulation, this document theoretically evaluates the effects of this reform over agents' welfare, by applying the Constant Absolute Risk Aversion (CARA) assumption and Modern Portfolio (Diversification) Theory. An empirical counterfactual exercise is used to estimate the value of pension personal account's on the case that the foundations of this financial reform happen to be present between 1980 and 2009. Theoretical analysis suggests that individuals decrease their risk exposition according to an increase in the accumulated value in their personal accounts. In contrast, counterfactual's exercise conclusion is that the best

---

\*Trabajo realizado para optar por el título de Magíster en Economía de la Universidad del Rosario bajo la dirección de Hernando Zuleta, profesor e investigador de la misma Universidad, a quien agradezco especialmente por su apoyo y sugerencias en la elaboración de este documento. Así mismo, quiero manifestar mi agradecimiento a Luis Eduardo Arango, Darío Maldonado, David Bardey, Rocío Betancourt y Hernando Vargas por sus valiosos comentarios y sugerencias.

choice for individuals would have been to invest the whole portfolio in variable rent assets.

**Keywords:** Pension System, Multifund System, Modern Portfolio Theory, CARA Utility Function.

**JEL classification:** D91, G11, G23, G31.

## 1. Introducción

En Colombia, desde la creación del Régimen de Ahorro Individual (RAI) en 1993, el valor de los fondos de pensiones obligatorias se ha incrementado considerablemente pasando de un 2% del PIB en 1994 a aproximadamente un 17% en 2009. Así mismo, este aumento en el valor total de los fondos se ha visto traducido en un incremento en la proporción que invierten las Administradoras de Fondos de Pensiones (AFP) en instrumentos de renta variable - principalmente acciones - y en una disminución en las tenencias en bonos.

De esta forma, en noviembre de 1994 las inversiones totales en acciones equivalían al 2.75% del valor total de los fondos, mientras que en noviembre de 2009 este porcentaje representaba el 39.1%. Como se observa en la figura 1, en el caso de Colombia, en marzo de 1996 se encuentra el menor porcentaje de las inversiones de renta variable equivalente al 0.19% del valor total de los fondos de las AFP, en contraste con el 39.1% a finales de 2009. En primer lugar, es de notar que este valor está muy cercano al límite permitido de inversiones en renta variable sobre el valor total del fondo (40%) según lo estipulado hasta febrero del 2008;<sup>1</sup> además la distribución entre porcentajes fijos y variables no depende de las preferencias de los ahorradores sino de las decisiones que toman las administradoras con base en la regulación.

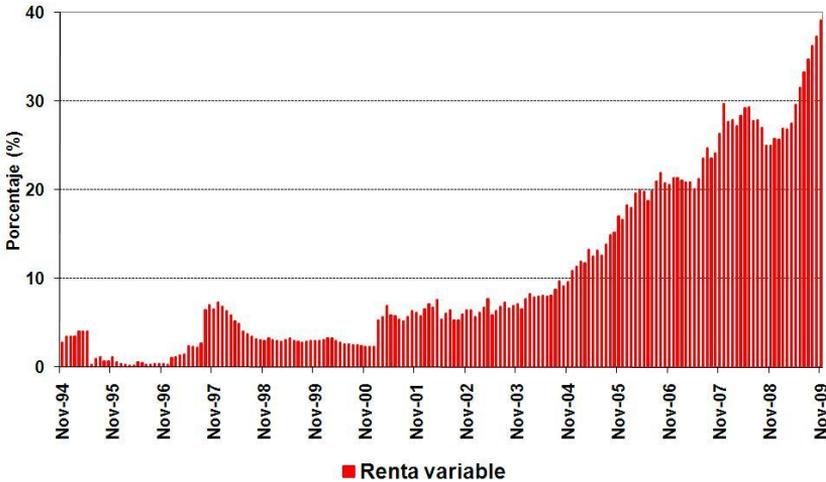
Una hipótesis preliminar indicaría que dar mayor libertad al ahorrador, ampliando los límites de inversión por activo financiero y las opciones de portafolio para escoger, tendría efectos positivos sobre su bienestar. Al tener en cuenta estas consideraciones y siguiendo el modelo de países como Chile, el gobierno nacional aprobó la Ley 1328 de 2009, en la que se plantea la transición al sistema de multifondos. En este sistema los individuos con alta aversión al riesgo pueden invertir sus ahorros en portafolios con una alta proporción de activos de renta fija y los individuos con baja aversión al riesgo pueden escoger portafolios con un nivel de riesgo mayor.

Esta reforma permite a los ahorradores diseñar, al menos parcialmente, su portafolio y, en esta medida, genera un aumento en su bienestar. No obstante, el hecho de que muchos de los agentes escojan incrementar el riesgo de su portafolio puede hacer que su utilidad ex-post se vea disminuida. Por esto resulta importante señalar claramente cuáles son las ganancias de bienestar y cuales las posibles pérdidas.

---

<sup>1</sup>A partir de esta fecha, la Superfinanciera incrementó este porcentaje hasta un 40% a través de la Circular Externa 005 de 2008.

**Figura 1.** Porcentaje de inversiones en activos de renta variable y fija 1995 - 2009



Fuente Superfinanciera.

El objetivo del presente trabajo es comparar el efecto del sistema de multifondos sobre los individuos con distintos niveles de ingreso y aversión al riesgo. Para esto, se comparan las cuentas finales de pensión de los individuos según la regulación actual y según el sistema multifondos. El análisis se realiza para el caso de varios individuos con distintos perfiles de ingreso y dependiendo de su nivel de educación, por rangos de edades; se utiliza la rentabilidad de los diferentes activos financieros desde 1980 hasta 2009 y se proyecta el valor de las cuentas pensionales para los diferentes individuos suponiendo que éstos comienzan a cotizar en el año 1980. Adicionalmente se analiza el caso teórico de un individuo con aversión al riesgo constante y sus decisiones óptimas de inversión en activos riesgosos y libres de riesgo.

El documento se encuentra organizado en siete secciones: en la segunda sección se presenta una breve revisión de la literatura que evalúa las decisiones de inversión de los individuos en los sistemas de pensiones, tanto teórica como empíricamente; en la tercera sección se contextualiza el sistema de pensiones en Colombia con énfasis en el RAI y su regulación, así como los principales puntos de la reforma financiera; en la cuarta sección se evalúa el caso de los individuos que presentan una función de utilidad de aversión constante al riesgo (CARA) y sus decisiones de inversión en activos riesgosos. En la quinta y sexta se realiza la comparación en las cuentas de pensión de los individuos bajo el sistema actual y con cambios en el riesgo asumido.

## 2. Revisión de Literatura

La literatura revisada puede clasificarse en dos tipos de estudios, teóricos y empíricos.

### 2.1. Estudios teóricos

El estudio de los multifondos se sustenta en la Teoría del Portafolio y la de la Diversificación Temporal. La Teoría del Portafolio considera dos tipos de activos: por un lado, libres de riesgo o de renta fija, con una tasa de retorno real conocida y constante. Por otro lado, riesgosos o de renta variable, con una rentabilidad desconocida<sup>2</sup> y una varianza que mide la incertidumbre de los retornos. Los inversionistas escogen el portafolio con base en el retorno esperado de sus activos, la varianza de cada uno de ellos y su disposición ante el riesgo. Así mismo, al escoger entre varios portafolios, a un mismo nivel de riesgo, el individuo preferirá el que genere un mayor retorno esperado. (Markowitz, 1952)

Cuando el análisis se realiza para varios períodos, el individuo considera su horizonte temporal para escoger el portafolio. En los fondos de inversión de largo plazo, como los sistemas de pensiones, Malkiel (1996) afirma que la mejor estrategia para los individuos es invertir su portafolio en acciones los primeros años de su vida laboral y posteriormente incrementar sus tenencias en bonos cuando se acerca la edad de retiro. Esta forma de diversificación se conoce como la Teoría de la Diversificación Temporal, y en ella se presenta la edad como determinante de la elección del portafolio. Kritzman (1994) encuentra que en el largo plazo el riesgo de invertir en acciones se disminuye y en promedio los retornos de los activos de renta variable son mayores que los de renta fija. Sin embargo, existe una discusión sobre la mejor decisión de inversión en el largo plazo; en este sentido Samuelson (1989) encuentra que los inversionistas racionales van a mantener en todas las edades la misma proporción de inversiones en acciones, este resultado es el mismo encontrado por Leland (1968), Mossin (1968), Merton (1969) y Hakansson (1970).

Mientras tanto otros autores afirman que las decisiones no dependen de la edad sino de la flexibilidad o el ingreso laboral de las personas. Merton et al. (1992) afirman que ante una mayor flexibilidad laboral, los individuos estarán dispuestos a asumir mayores riesgos independientemente de su edad y Walker (2006) encuentra que la inversión en acciones depende del valor presente del ingreso laboral (o capital humano) y cuando éste ingreso es riesgoso las inversiones se concentrarán en bonos.

### 2.2. Estudios empíricos

Los estudios empíricos también se dividen entre los que comprueban la diversificación temporal y los que no. En primera instancia, para el caso de los multifondos en el sistema de pensiones chileno se encuentra que aquellos fondos

---

<sup>2</sup>Este retorno debe tener en cuenta el tiempo de la inversión y la prima de riesgo asociada con la incertidumbre.

con mayor proporción de acciones, escogidos por los jóvenes, presentan un mayor riesgo en el corto plazo pero menor volatilidad en el largo plazo, además de mayores retornos que los bonos (Herscovich, 2003). Por el contrario, en otros estudios que analizan el comportamiento de los hogares de Estados Unidos no se encuentra evidencia de un cambio en la proporción invertida en acciones cuando se incrementa la edad de los individuos (Ameriks y Zeldes, 2004).

En conclusión, tanto los trabajos teóricos como los empíricos presentan diversidad de argumentos que sustentan una mayor inversión en activos de renta variable para los individuos jóvenes, y posteriormente un cambio hacia una mayor inversión en activos de renta fija cuando se acerca la edad de retiro. Para el caso colombiano, el análisis es interesante a la luz de la teoría y debido a que la reforma financiera plantea la transición de un solo fondo hacia el sistema multifondos. Así, se pretende comprobar si en el largo plazo se disminuye el riesgo en los portafolios compuestos principalmente por acciones y evaluar el efecto del cambio al sistema de multifondos para el individuo representativo bajo dos perfiles de ingreso, con nivel de educación ninguno o primaria y nivel universitario.

### 3. Antecedentes y contexto del sistema de pensiones en Colombia

En Colombia, el sistema mixto de pensiones está compuesto por dos regímenes: El Régimen Solidario de Prima Media con prestación definida o RPM, y el Régimen de Ahorro Individual con Solidaridad o RAI.

El RPM es un sistema “*pay as you go*” que consiste en que los aportes de los afiliados se dirigen a un fondo común desde donde son distribuidos a quienes se van pensionando durante el período en curso. Hasta 1993, fue el único régimen establecido en Colombia, administrado inicialmente, por el Instituto de Seguros Sociales (ISS),<sup>3</sup> que atendía a los trabajadores del sector privado y a los oficiales pertenecientes al régimen laboral privado. En segunda instancia, se encontraba la Caja Nacional de Previsión, CAJANAL<sup>4</sup> que atendía a los empleados públicos. Sin embargo, existía además un número bastante alto de instituciones, que manejaban distintos regímenes pensionales,<sup>5</sup> todos basados en un régimen de Prima Media. Esto ocasionó en el sistema de pensiones deficiencias como: baja cobertura, inequidad en los beneficios de los múltiples regímenes y un creciente desequilibrio fiscal, (Ver Acosta y Ayala, 2001).

En este sentido, para solucionar estos problemas se planteó la reforma pensional de 1993, dirigida a establecer, mediante la Ley 100, un sistema *fully funded* denominado RAI y se planteó así el sistema mixto.<sup>6</sup> En el RAI cada

<sup>3</sup>Creado en 1967, con el fin de ofrecer los servicios de salud y riesgos profesionales, además de los de pensiones.

<sup>4</sup>Creada con la Ley 90 de 1946.

<sup>5</sup>Según Candelo (2006), de las 1.046 instituciones que existían en 1990, 1.008 eran estatales. Así mismo, antes de la reforma de 1993 existían 971 regímenes pensionales diferentes.

<sup>6</sup>Los individuos pueden escoger uno de los dos regímenes, pero sus cotizaciones no se pueden repartir entre ambos. Además se estipula que el afiliado puede trasladarse libremente de régimen, siempre y cuando haya permanecido en el último por lo menos (5) años, contados a partir de la selección inicial o el último traslado válido. (Decreto 692 de 1994 y Circular

afiliado aporta a su propia cuenta adscrita a una de las Administradoras de Fondos de Pensiones (AFP), y su pensión sólo depende de las cotizaciones y respectivos rendimientos financieros acumulados de su cuenta.

### 3.1. Características generales del Régimen de Ahorro Individual, RAI

Chile fue el primer país de América Latina en implementar el RAI, en mayo de 1981. Su característica principal es que cada AFP cuenta con distintos tipos de Fondos<sup>7</sup> y los aportes de los afiliados se dirigen a un fondo distinto y único, dependiendo de factores como la edad, algunas características específicas y la decisión del afiliado. La cotización que realiza cada afiliado es un porcentaje fijo sobre sus ingresos y cada AFP cobra libremente comisiones por administración que pueden ser: una suma fija, un porcentaje del ingreso base de cotización o una combinación de ambas.

En Colombia el Régimen de Ahorro Individual se estableció con la Ley 100 de 1993 y a diferencia de Chile no existen varios fondos para cada AFP sino que los afiliados escogen la Administradora a la cual desean afiliarse y el fondo es el mismo para todos. El sistema está compuesto por seis AFP entre las que se encuentran: Colfondos, Horizonte, Porvenir, Protección, ING y Skandia.

Las características del Régimen son las siguientes: los empleadores participan obligatoriamente con un 75 % sobre la cotización total y los trabajadores con el 25 % restante. El ingreso base de cotización debe ser mayor o igual al Salario Mínimo Legal Mensual Vigente (SMLV), a excepción de los trabajadores del servicio doméstico, único caso en el que puede ser menor según la Ley 11 de 1988. A partir de la Ley 797 de 2003 el aporte se hizo obligatorio para todos los trabajadores, puesto que antes era voluntario para los independientes.

Desde enero de 2009 el aporte es equivalente al 16.0 % del salario mensual,<sup>8</sup> y se distribuye así: el 11.5 % se destina a las cuentas individuales de ahorro pensional, el 3 % para financiar gastos de administración, primas para seguros de invalidez y prima de reaseguros de Fogaffn,<sup>9</sup> y el 1.5 % restante se destina al Fondo de Garantía de Pensión Mínima<sup>10</sup> creado con el RAI.

Las AFP pueden fijar libremente el porcentaje de comisiones sobre los aportes de sus afiliados, con la restricción de que sumados a la primas de seguros y reaseguros sean equivalentes al 3 % del salario mensual.<sup>11</sup>

---

Externa 001 de 2004)

<sup>7</sup>Antes de julio de 2002 existían solo 2 Fondos, Tipo 1 y 2. Luego de esta fecha se convirtieron en cinco Fondos: A, B, C, D y E. El afiliado menor a 55 años en el caso de los hombres y 50 años para las mujeres, puede optar por cualquiera de los fondos., excepto por los Fondos Tipo A y Tipo B cuando es declarado inválido. En el caso de que no tome una decisión al momento de afiliarse, será asignado entre los fondos B, C y D, dependiendo de su edad. En el Fondo Tipo D, se ubicará a los declarados inválidos.

<sup>8</sup>Este porcentaje ha venido cambiando en los últimos años, siendo del 13.5 % en 2003, 14.5 % en 2004, 15.00 % en 2005 hasta llegar al 15.5 % en 2006.

<sup>9</sup>Antes de enero de 2003 era de 3.5 %

<sup>10</sup>La Ley 797 de 2003 establece un nivel mínimo de pensión para los afiliados al RAI, sin embargo cuando el monto total de los ahorros y sus retornos no permite alcanzar ese nivel, se acude a éste fondo común de recursos para financiar a dichos ahorradores.

<sup>11</sup>El Anexo 1 muestra la evolución de las comisiones por administración cobradas por las

### 3.2. Regulación del RAI

En Colombia el ente designado por el Gobierno para supervisar a las AFP es la Superintendencia Financiera<sup>12</sup> (SFC) y la regulación consta de dos aspectos: primero, la SFC estipula los activos en los que las AFP pueden invertir y los límites máximos de inversión en cada uno. En la Tabla 1, se presenta el resumen de las restricciones, que incluye el límite de inversiones de renta variable en 40 %:

**Tabla 1.** Límites de inversión por instrumento financiero

Tipo de inversión	Límite máximo, respecto al valor del fondo (%)
Títulos de deuda pública	50 %
Bonos y títulos hipotecarios y titularización cartera hipotecaria	40 %
Títulos participativos  Acciones de alta y media bursatilidad, carteras colectivas bursátiles, ADRs, GDRs y acciones de procesos de privatización o de capitalización donde el estado tenga participación.  Acciones de baja y mínima bursatilidad, ADRs y GDRs.  Carteras colectivas abiertas sin pacto de permanencia y con títulos participativos. Excluidas las carteras de margen y de especulación.  Carteras colectivas abiertas con pacto de permanencia, cerradas o escalonadas y con títulos participativos. Excluidas las carteras de margen y de especulación.	40 %
Títulos de emisores del exterior	50 %

Segundo, en la Ley 100 de 1993 se estipula que cada AFP debe asegurar una rentabilidad mínima de los fondos de pensiones obligatorios y con el Decreto 1141 de 1995 el Gobierno faculta a la SFC para calcular y establecer éste nivel.

AFP entre enero de 1999 y julio de 2007.

<sup>12</sup>Creada en enero de 2006 como resultado de la fusión de la Superintendencia Bancaria y la de Valores, antes de la fusión la encargada era la Superintendencia Bancaria.

La idea es que las inversiones provenientes de las cotizaciones de los afiliados se encuentren cubiertas ante el riesgo y volatilidad de los mercados financieros. Así, cuando éste mínimo de rentabilidad no es alcanzado, las AFP deben responder con sus propios recursos a los afiliados, por medio de la Reserva de Estabilización.<sup>13</sup> La rentabilidad mínima es calculada con base en los rendimientos del mercado financiero y los de un portafolio de referencia en el que se cumple con los límites de inversión previamente establecidos.<sup>14</sup> El Anexo 2, presenta los mecanismos de cálculo de la Rentabilidad Mínima considerada en el Decreto 1592 de 2004 y el que lo derogó en el Decreto 2664 de 2007.

### 3.3. *Reforma financiera*

La Ley 1328 de 2009, en la que se ajusta el marco regulatorio del Sistema Financiero, dicta normas en materia financiera, de seguros, del mercado de valores y hace referencia principalmente al régimen de protección al consumidor financiero, las facultades de intervención del Gobierno Nacional y la estructura del Sistema Financiero, la promoción de las microfinanzas, el Fondo de Garantías de las instituciones financieras, el régimen financiero de los fondos de pensión obligatoria y cesantía, y la liberalización comercial en materia de servicios financieros entre otros.

Específicamente para el caso del RAI, la reforma plantea que el sistema de Administración se convierta en un sistema Multifondos,<sup>15</sup> bajo el cual cada AFP establece distintos fondos, dependiendo de factores como la edad, expectativa de los afiliados y aversión al riesgo. Así mismo, se establece la posibilidad de escoger el fondo por parte de los afiliados y se deja al Gobierno la libertad de definir la estructura de cada fondo (rentabilidad mínima, portafolio de inversión, etc.). En unión con este punto, el Gobierno tendría una mayor flexibilidad al establecer la rentabilidad mínima, puesto que al existir varios fondos no se podría usar un criterio único.

En la Ley 100 de 1993, se estipula que la SFC es la institución que establece el régimen de inversión de los fondos, sin embargo, la reforma devuelve esta potestad al Gobierno.

## 4. **Análisis Teórico**

En los sistemas multifondos los individuos escogen el nivel de riesgo que desean asumir en las inversiones de sus ahorros. De tal forma que un mayor nivel de riesgo es representado por un incremento en las inversiones de activos riesgosos o de renta variable. Siguiendo la literatura y estudios empíricos existentes sobre

---

<sup>13</sup>Establecida en el Decreto 721 de 1994, el monto de la reserva que debe tener cada Administradora es igual al (1%) del valor del respectivo fondo.

<sup>14</sup>A través de la Circular Externa 079 de 1995, modificada por el Decreto 1592 de 2004 la SFC definió las pautas para crear y valorar un portafolio de referencia conformado por Bonos, TES y CDTs.

<sup>15</sup>El primer país en establecer los multifondos fue Chile (2002), cada AFP manejaba 2 tipos de fondos inicialmente y luego se convirtieron en 5. Posteriormente se encuentran los casos de Perú (2003) y México (2005).

la teoría de la diversificación temporal, esta decisión se vería influenciada por la edad de los individuos. De tal forma que en la medida en la cual tiene una mayor edad y su valor acumulado en su cuenta pensional es mayor, la mejor opción del individuo es invertir menos en renta variable.

Para comprobar esta hipótesis y encontrar la mejor decisión de los agentes, se analiza el caso de un individuo representativo que realiza sus aportes a la administradora de fondos de pensiones y esta los invierte en el mercado en los distintos activos financieros (libres de riesgo y riesgosos) y va acumulando los aportes del individuo y los retornos de sus inversiones en su cuenta pensional.

El mercado financiero está compuesto de activos riesgosos (renta variable) y libres de riesgo (renta fija) de tal forma que los aportes del ahorrador se invierten en un portafolio cuya rentabilidad,  $r_T$ , es una combinación lineal entre la rentabilidad de los activos riesgosos  $r^R$  y la rentabilidad de los activos libres de riesgo  $r^L$ , ponderadas por la proporción invertida del portafolio en cada uno de estos activos,  $\lambda$  y  $(1 - \lambda)$  respectivamente, como se encuentra en la ecuación 1:

$$r_T = \lambda r^R + (1 - \lambda)r^L \quad (1)$$

Los activos de renta variable se encuentran distribuidos normalmente, con media  $\mu^R$  y varianza  $\sigma_R^2$ ; y los activos de renta fija tienen una rentabilidad constante con media  $r^L$ . De tal forma que el valor esperado y la varianza de la rentabilidad del portafolio son respectivamente:

$$E(r_T) = \lambda\mu^R + (1 - \lambda)r^L \quad (2)$$

$$Var(r_T) = \lambda^2\sigma_R^2 \quad (3)$$

Por su parte, el individuo devenga un salario  $\omega$  en cada período y ahorra un porcentaje  $\theta$  que va destinado a su cuenta de pensiones. Este aporte es invertido por la Administradora y se va acumulando en la cuenta pensional del individuo, de tal forma que la riqueza del individuo en cada período,  $W_t$ , es igual al valor del aporte de ese período,  $\theta\omega$ , más el valor acumulado de los aportes anteriores capitalizados por la tasa de interés del portafolio de inversión,  $r_t$ , en el período actual.<sup>16</sup>

$$\begin{aligned} W_0 &= \theta\omega \\ W_1 &= \theta\omega + \tilde{W}_0(1 + r_1) \\ W_2 &= \theta\omega + \tilde{W}_1(1 + r_2) \\ &\vdots \\ W_T &= \theta\omega + \tilde{W}_{T-1}(1 + r_T) \end{aligned} \quad (4)$$

Así, en  $t = 1$  la riqueza del individuo ( $W_1$ ) va a ser igual al valor del aporte  $\theta\omega$  en ese período, más el valor del aporte realizado en el período anterior

<sup>16</sup>Las ecuaciones (1) y (3) son basadas en el modelo de Bravo y Vásquez, en el cual se analiza el comportamiento manada de los fondos de pensiones en Chile.

( $W_0 = \theta\omega$ ) incluyendo los intereses del período. En ese sentido el valor del aporte de cada período va a capitalizarse en el siguiente período.

Así, el valor esperado y la varianza de la riqueza del individuo en el momento  $T$  son:<sup>17</sup>

$$E[W_T] = \theta\omega + \tilde{W}_{T-1} (1 + \lambda\mu^R + (1 - \lambda)r^L) \quad (5)$$

$$Var[W_T] = \tilde{W}_{T-1} \lambda^2 \sigma_R^2 \quad (6)$$

El individuo tiene una función de utilidad con aversión al riesgo, CARA, determinada por el parámetro  $\rho$  y el nivel de riqueza  $W_T$ , de tal forma que en un sistema de inversiones como las pensiones obligatorias en multifondos, escogen el nivel de riesgo que están dispuestos a asumir, al decidir sobre  $\lambda$ . Según las características de la función y las propiedades de la distribución normal se tiene:<sup>18</sup>

$$\begin{aligned} U(W_T) &= -\frac{1}{\rho} e^{-\rho W_T} \\ E[U(W_T)] &= E\left[-\frac{1}{\rho} e^{-\rho W_T}\right] \\ &= -\frac{1}{\rho} e^{-\rho E[W_T] + 0,5\rho^2 V[W_T]} \end{aligned} \quad (7)$$

En el período  $T$ , el valor de  $T-1$  es un valor determinístico para el individuo quien conoce el valor acumulado de su cuenta en el momento de decidir.

Reemplazando (5) y (6) en (7) se obtiene:

$$E[U(W_T)] = -\frac{1}{\rho} e^{-\rho\{\theta\omega + \tilde{W}_{T-1}(1 + \lambda\mu^R + (1 - \lambda)r^L)\} + 0,5\rho^2 \tilde{W}_{T-1} \lambda^2 \sigma_R^2} \quad (8)$$

La utilidad esperada del individuo, que depende de su riqueza acumulada, incluye la rentabilidad de ambos tipos de activos y la varianza del portafolio. De forma tal que el individuo escoge la proporción que invierte en activos riesgosos que le genera una mayor utilidad esperada, con las rentabilidades y varianzas determinadas exógenamente. Así, maximizar la anterior expresión es equivalente a maximizar:<sup>19</sup>

$$E[U(W_T)] = \left\{ \theta\omega + \tilde{W}_{T-1} (1 + \lambda\mu^R + (1 - \lambda)r^L) \right\} + 0,5\rho^2 \tilde{W}_{T-1} \lambda^2 \sigma_R^2$$

Entonces el porcentaje de inversión en activos riesgosos va a estar determinado por:

$$\lambda^* = \frac{(\mu^R - r^L)}{\rho \tilde{W}_{T-1} \sigma_R^2} \quad (9)$$

<sup>17</sup>En el Anexo 3 se encuentra el procedimiento.

<sup>18</sup>En el caso de las funciones (CARA), que son exponenciales, caracterizadas por:  $u(w) = -\frac{\exp(-aw)}{a}$  se tiene que la aproximación Arrow-Pratt es exacta e igual a  $\rho$  (cuando  $u$  es exponencial y  $w$  está normalmente distribuida con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ ); Eeckhoudt, Gollier y Schlesinger (2005).

<sup>19</sup>El valor esperado de la función de utilidad es igual a:  $E[U(W)] = u(\mu - 0,5a\sigma^2)$ . Eeckhoudt, Gollier y Schlesinger (2005)(op. cit.).

Lo anterior implica que los individuos van a invertir una proporción  $\lambda^*$  de su portafolio en acciones. Esta proporción depende positivamente del diferencial de tasas de retorno.

**Proposición 1** *Cuando se incrementa la aversión al riesgo, los individuos disminuyen la proporción invertida en activos riesgosos.*

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \rho} = - \frac{(\mu^R - r^L)}{\tilde{W}_{T-1} \rho^2 \sigma_R^2} < 0$$

Esto implica que a pesar de que la tasa de rentabilidad de los activos libres de riesgo sea más baja que la de los activos de renta variable, el individuo preferirá sacrificar parte de su rentabilidad cuando se incrementa su aversión al riesgo, e invertir más en renta fija.

Desde el punto de vista de los multifondos, teniendo en cuenta que los individuos tienen distintos niveles de aversión al riesgo y así mismo que esta aversión puede variar con la edad, los individuos decidirán distintas composiciones de portafolios a lo largo del tiempo de cotización y estos porcentajes serán distintos entre individuos.

**Proposición 2** *Cuando se incrementa la riqueza acumulada en la cuenta pensional de un individuo hasta el período  $T - 1$ , en el período  $T$  el individuo prefiere invertir en activos libres de riesgo y disminuir su proporción invertida en activos riesgosos.*

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{W}_{T-1}} = - \frac{(\mu^R - r^L)}{\rho \tilde{W}_{T-1}^2 \sigma_R^2} < 0$$

De tal forma que entre mayor sea el valor acumulado en la cuenta pensional de un individuo (entre mayor sea su ingreso acumulado o más tiempo lleve cotizando) menores incentivos tendrá a asumir riesgos en su portafolio de pensiones. Cuando los individuos jóvenes empiezan a cotizar e invierten su portafolio en acciones, van a tener mayor tiempo y posibilidad de recuperar sus pérdidas en caso de que la rentabilidad del mercado accionario caiga. Adicionalmente, dado que el tiempo de cotización es más alto, este individuo tendrá un mayor valor acumulado en su cuenta pensional y será más precavido que cuando es joven con el valor acumulado de sus ahorros. En síntesis, los agentes con mayor aversión al riesgo dedicarán una menor proporción de su ahorro a acumular acciones dado que prefieren cubrirse ante el riesgo invirtiendo en activos de renta fija. Este caso es contrario al de los agentes con menores niveles de riqueza quienes dedicarán una mayor proporción de su ahorro a invertir en acciones.

En síntesis, los agentes *más aversos al riesgo* dedicarán una *menor* proporción de su ahorro a acumular acciones y los agentes con *menores niveles de riqueza* dedicarán una *mayor* proporción de su ahorro a acumular acciones.

Por esta razón, resulta razonable pensar que los agentes irán recomponiendo sus fondos, haciéndolos más conservadores con el paso del tiempo y que, todo lo demás constante, los agentes más aversos al riesgo tendrán portafolios más conservadores.

En la Tabla 2 se presentan distintos esquemas de inversión en portafolios con distintas proporciones de inversiones en acciones. Se consideran 5 tipos de fondos distintos, con límites máximos y mínimos en inversiones en acciones de la siguiente forma: Fondo A (40% a 80%), Fondo B (25% a 60%), Fondo C (15% a 40%), Fondo D (5% a 20%) y el Fondo E invertido completamente en activos de renta fija; por lo tanto el Fondo es el más riesgoso y el Fondo E el más conservador.

**Tabla 2.** Escenarios de inversión en portafolios  
1995 - 2009

		Hasta 35 años	De 36 a 55 años	Desde 56 años
Opciones de inversión	A			
	B			
	C			
	D			
	E			

De esta forma siguiendo la trayectoria 1, los individuos invertirán en el fondo A hasta los 35 años, posteriormente en el fondo (desde los 36 hasta los 55 años) y por último en el fondo C con un menor riesgo desde los 51 años. En la trayectoria 2, los individuos empezarán invirtiendo en el fondo B para ir disminuyendo su riesgo a medida que pasa el tiempo y luego invierten en los fondos C y D. Por último, en la trayectoria 3, el individuo empieza en el fondo C y posteriormente invierte en los fondos D y E.

Así, el individuo que tenga una mayor aversión al riesgo elegirá la trayectoria 3 donde su portafolio está invertido menos en renta variable, en comparación con las demás trayectorias.

Cabe aclarar que los porcentajes de inversión por cada tipo de fondo y por edad han sido definidos de manera arbitraria, asemejándose al modelo chileno en el cual los límites de edad se encuentran definidos en tres intervalos: menores a 35 años, de 36 a 55 años y de 56 años en adelante.

## 5. Ejercicio para Colombia

Luego de analizar las decisiones de inversión de los ahorradores desde un punto de vista teórico, en la siguiente sección se desarrolla un ejercicio contrafactual en el que se calculan los valores de las cuentas de pensión de dos individuos con distintos perfiles de ingreso, que invierten en un esquema de multifondos (Tabla 2), y se compara con los resultados efectivos de la inversión, con los porcentajes históricos (desde 1993 hasta 2009). En ambos casos, se toman los resultados reales de la rentabilidad de los activos riesgosos y libres de riesgo, con el fin de analizar los efectos del cambio sobre el bienestar de los individuos.

## 6. Datos y Enfoque metodológico

Para realizar las proyecciones de las cuentas de pensión desde 1980 a 2009, como aproximación a la rentabilidad de los activos de renta variable se utilizan las rentabilidades mensuales reales de los índices generales de las Bolsas de Bogotá, Medellín y Occidente, ponderadas por tamaño desde 1980 a junio de 2001. Desde julio de 2001 en adelante, se utiliza la rentabilidad real de la Bolsa de Valores de Bogotá, (BVC).<sup>20</sup>

Así mismo, la rentabilidad de los activos de renta fija se obtiene de la DTF mensual en términos reales, y los salarios (según los perfiles de ingreso de los individuos) se toman de la Encuesta de Calidad de Vida, ECV de 2003 y se deflactan por el Índice de Precios al Consumidos, IPC base 2001. En el Anexo 4 se encuentran las figuras de los comportamientos de estas variables.

Para calcular el valor de las cuentas de pensión se realizan las proyecciones de la riqueza del individuo a 29 años para compararlas para dos tipos de individuos (clasificados por nivel educativo y edad), que han cotizado en portafolios con distintas composiciones de activos riesgosos entre los años 1980 y 2009. El ingreso del individuo representativo, sobre el cual se realizan los aportes a pensiones, se toma como el promedio del ingreso de acuerdo a la edad y el nivel educativo (ninguna educación hasta básica, secundaria o superior), tomando como unidad de cuenta el Salario Mínimo Legal Vigente, SMLV.

El porcentaje de cotización a pensiones se toma según lo estipulado por la Ley: 10 % de 1993 a 2004; 10.5 % en 2005; 11 % de 2006 a 2007 y 11.5 % en 2008 -2009 (desde 1980 hasta 1993 se aplica el porcentaje de 1993). Así mismo, los cálculos de la riqueza de los individuos también se realizan usando los porcentajes históricos de inversión en renta variable y fija, reportados por las AFP ante la Superfinanciera entre 1994 - 2009 (para 1980 a 1993 se toman los porcentajes históricos de 1994). En el apéndice 1 se encuentran algunas estadísticas descriptivas de los fondos y una explicación detallada de los cálculos.

## 7. Resultados

En las figuras siguientes, se encuentran los valores acumulados de las cuentas de pensión de un individuo con educación universitaria y sin educación hasta primaria respectivamente, que devengan un salario promedio acorde con su nivel de educación y según la información de la ECV 2003.

Se consideran varios escenarios de inversión para el individuo que cotiza desde sus 18 años de edad (1980) hasta los 47 años en 2009: en el primero invierte el 100 % de sus aportes en acciones, en el segundo invierte siempre en activos de renta fija, en el tercero invierte según los porcentajes reales históricos y en el último cambia sus porcentajes de inversión con la edad, de tal forma que invierte según las trayectorias definidas en la Tabla 2.

---

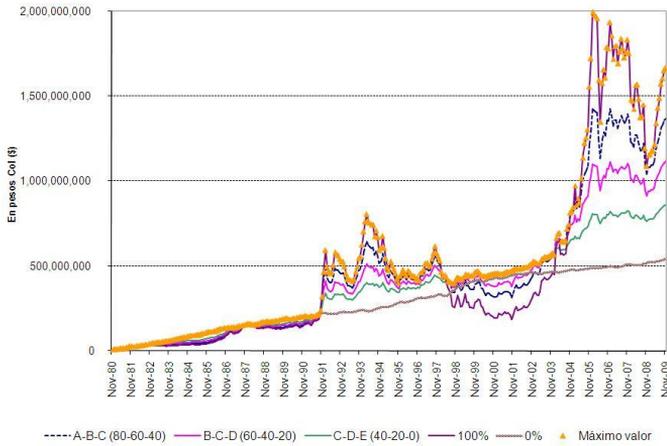
<sup>20</sup>En julio de 2001 las tres bolsas existentes hasta el momento se fusionaron para conformar la Bolsa de Valores de Colombia.

7.1. Perfil de ingreso: Educación universitaria

7.1.1. Porcentajes constantes vs. Porcentajes variables (decrecientes) de inversión en renta variable

En la figura 2 se muestran los valores acumulados de la cuenta pensional de un individuo con educación universitaria, que devenga un salario promedio acorde con su nivel de educación, según la información de la ECV 2003. Se consideran cuatro posibles opciones de inversión para el individuo que cotiza desde sus 18 años desde 1980 hasta los 47 años en 2009: en la primera invierte el 100 % de sus aportes en acciones, en la segunda invierte siempre en activos de renta fija, en la tercera cambia sus porcentajes de inversión de tal forma que se encuentra el máximo valor posible para su cuenta pensional y en la última cambia sus porcentajes de inversión con la edad.

**Figura 2.** Cuenta de pensión acumulada, individuo con educación universitaria y cotización desde 1980 a 2009 (Distintos porcentajes de inversión en renta variable).



Como se observa en la figura 2, en octubre de 1991, agosto de 1998 y febrero del 2004 los valores de las cuentas de pensión con inversión en acciones igual 100 % y el 0 % del portafolio son iguales, es decir, son las fechas en las que se cambia la trayectoria de los resultados. A noviembre de 2009, el mayor valor de la cuenta pensional (en pesos constantes de 2001), es igual a \$1.665 millones cuando las inversiones se han realizado completamente en acciones, seguido por \$1.370 millones cuando ha cambiado invertido siguiendo la trayectoria 1, luego por \$1.116 millones cuando sigue la trayectoria 2, \$859.5 millones cuando sigue la trayectoria 3 y por último \$544 millones cuando invierte siempre en bonos.

Es de notar que el máximo posible es alcanzado en la mayoría de los casos al invertir 100 % en portafolio y 0 % en acciones. Desde mayo de 1980 a septiembre de 1991 se alcanza el máximo con 0 %, y desde octubre de 1991 a junio de 1998,

así como desde octubre de 2004 hasta noviembre de 2009, el máximo valor se encuentra con 100 % en inversiones. Para el período comprendido entre junio de 1998 y octubre de 2004, el máximo valor se obtiene con distintas combinaciones de portafolio.<sup>21</sup>

### 7.1.2. *Porcentajes históricos Vs. Porcentajes variables (decrecientes) de inversión en renta variable*

Al comparar los valores de las cuentas pensionales cuando los aportes son invertidos respectivamente con: los porcentajes históricos promedio del sistema, los distintos porcentajes en activos de renta variable constantes a lo largo del período 100 % y 0 %, y con los porcentajes que van disminuyendo paulatinamente con la edad del individuo. En la figura 3 se observa que para el período 1991 a 1998, al comparar los desempeños de los aportes realizados por los individuos con los porcentajes históricos (iguales al 2.6 % en promedio), dentro de este perfil de ingreso, estos son de los más bajos. Para el período 2004 a 2009, los resultados históricos solo superan los valores acumulados de las cuentas que invierten todo en renta fija. Esto indicaría que a pesar de que la restricción de los límites de inversión en renta variable no era activa (dado que es del 30 %) los resultados se habrían podido mejorar con una mayor exposición del portafolio a estos activos.<sup>22</sup>

Así mismo, se encuentra que los individuos que tienen una mayor exposición de sus portafolios ante los activos de renta variable (trayectorias 1 a 3) tienen un resultado superior en sus cuentas de pensiones al que se tendría manteniendo los porcentajes históricos. Sin embargo, es importante resaltar que este resultado depende de la fecha en la cual las personas retiran sus ahorros pensionales, puesto que de haberse retirado del sistema entre abril de 1998 y abril de 2004, los mejores resultados se obtienen con los porcentajes históricos, invirtiendo 0 % en acciones y en la trayectoria 3.

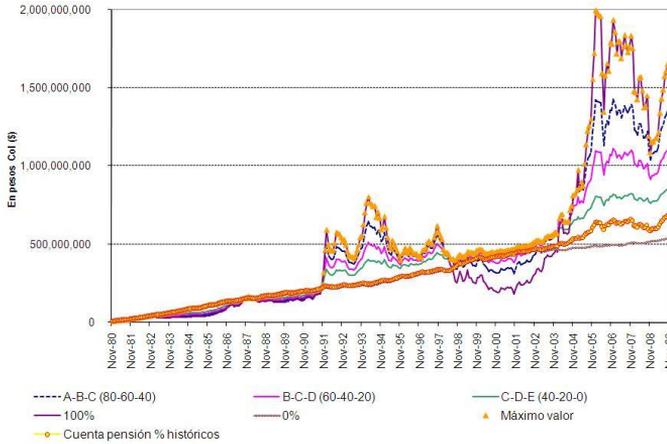
En este sentido es importante resaltar que un resultado *ex-ante* sugiere a ambos individuos concentrar las inversiones de sus últimos años de cotización en activos de renta fija, sin embargo, debido al comportamiento del mercado financiero, el resultado *ex-post* indica que la mejor opción de inversión para el individuo habría implicado asumir más riesgo para estos años y concentrar sus ahorros en inversiones en acciones.

---

<sup>21</sup>En el Anexo 5 se presentan las gráficas por períodos de siete años.

<sup>22</sup>En el Anexo 6 se presentan las gráficas por períodos de siete años.

**Figura 3.** Cuenta de pensión acumulada, individuo con educación universitaria y cotización desde 1980 a 2009 (Porcentajes de inversión históricos vs. Variaciones según la edad).



7.2. Perfil de ingreso: sin educación hasta primaria

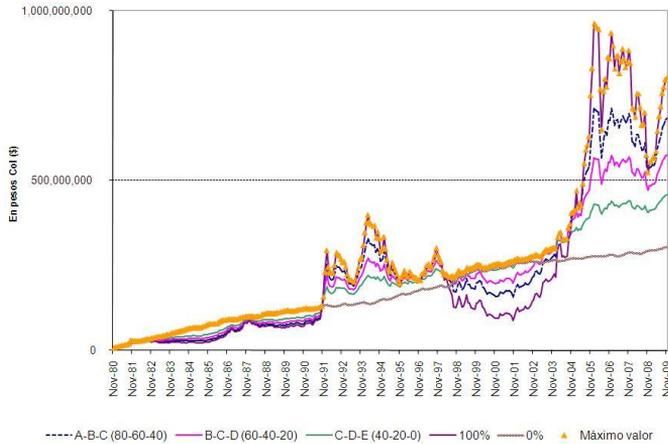
7.2.1. Porcentajes constantes vs. Porcentajes variables (decrecientes) de inversión en renta variable

En el caso de los individuos sin ningún grado de educación hasta primaria, los valores acumulados de su cuenta de pensión, a noviembre de 2009, son menores que en el caso del individuo con mayor educación: \$802.9 millones al invertir todo el portafolio en acciones, \$683.8 millones invirtiendo el portafolio en la trayectoria 1, \$576.5 millones invirtiendo en la trayectoria 2, \$458.4 millones en la trayectoria 3 y por último \$306.7 millones cuando se invierte todo el portafolio en renta fija.<sup>23</sup>

Este individuo con un bajo nivel de educación obtiene el mayor valor de su cuenta cuando invierte todos sus aportes en acciones (desde noviembre de 1991 a mayo de 1998 y desde octubre de 2004 a noviembre de 2009) o en renta fija (de abril de 1980 a diciembre de 1991), en el período comprendido entre junio de 1998 y octubre de 2004, y el máximo valor se obtiene con distintas combinaciones de portafolio. Cabe anotar que para la mayor parte del período, las decisiones de una mayor inversión en acciones coinciden con una menor rentabilidad de estos activos (abril de 1980 a noviembre de 1991), mientras que las decisiones de una mayor inversión en renta fija coinciden con disminuciones en la tasa de interés real (octubre de 2004 a noviembre de 2009, ver Anexo 4, panel B)

<sup>23</sup>En el Anexo 7 se presentan las gráficas para períodos de siete años.

**Figura 4.** Cuenta de pensión acumulada, individuo sin educación o con primaria, y cotización desde 1980 a 2009 (Distintos porcentajes de inversión en renta variable).



A modo de ejemplo, si el individuo con mayor nivel de educación hubiese invertido siempre en bonos, su valor final de la cuenta de pensión (\$544 millones) sería menor en noviembre de 2009 que la cuenta de pensión del individuo con menor nivel de educación que ha cotizado el mismo tiempo e invertido siempre en acciones (\$802.9 millones), a pesar de tener menores salarios y aportes reales según los datos de la ECV de 2003 (ver Anexo 4, panel C). Esto nos indica que el incremento en los límites en los porcentajes de inversión debe ir acompañado de una mayor información y asesoría por parte de las AFP hacia los ahorradores, en caso contrario pueden tomar decisiones contrarias a los resultados del mercado financiero.

### 7.2.2. Porcentajes históricos Vs. Porcentajes variables (decrecientes) de inversión en renta variable

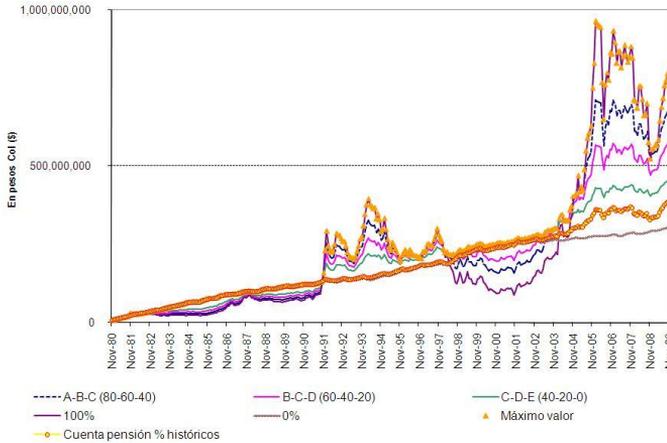
Al igual que en el caso del individuo con mayor nivel de educación, al utilizar los porcentajes de inversión históricos se obtienen los resultados más bajos entre 1991 y 1998. Para el período 2004 a 2009, solo lo superan los valores de los portafolios compuestos completamente por bonos.<sup>24</sup>

Los anteriores resultados sugieren *ex-post*, que tanto para los individuos con un nivel alto de educación como para los de nivel bajo, la mejor decisión hubiera sido invertir todo su portafolio en acciones, mientras que *ex-ante* habría sido mejor ir reduciendo la exposición al riesgo a medida que pasaba el tiempo. No obstante, aquí se partió del supuesto de que el retorno a las acciones tiene media y varianza constantes y exógenas. Esto no necesariamente es así y por eso el papel de los asesores financieros puede ser fundamental, pues su importancia

<sup>24</sup>En el Anexo 8 se presentan las gráficas por períodos de siete años.

radica en la ayuda que le den a los afiliados y el conocimiento que tengan sobre el desempeño del mercado financiero en cada momento.

**Figura 5.** Cuenta de pensión acumulada, individuo sin educación o con primaria y cotización desde 1980 a 2009 (Porcentajes de inversión históricos vs. Variaciones según la edad).



**8. Conclusiones**

Este documento presenta una aproximación a la teoría de diversificación temporal desde el punto de vista teórico, y un ejercicio empírico que pretende estimar los efectos que la reforma habría tenido sobre los fondos de pensiones y sobre las cuentas de ahorros de los individuos con niveles altos y bajos de educación desde 1980 hasta 2009.

En primer lugar, los resultados teóricos permiten afirmar que los individuos van a disminuir la proporción invertida en activos riesgosos ante incrementos en el coeficiente de aversión al riesgo. Debido a que este coeficiente puede cambiar con la edad, el resultado implica que en un sistema multifondos los porcentajes de inversión por tipo de activo pueden ser distintos entre individuos y a lo largo de todo el período de cotización.

El segundo resultado teórico indica que los individuos van a disminuir sus inversiones en acciones cuando el nivel acumulado en sus cuentas de pensión se incrementa, de tal forma que al pasar el tiempo e ir aumentando el valor total de sus ahorros, los afiliados van a cambiar la distribución de su portafolio pasando de invertir un mayor porcentaje en acciones cuando son jóvenes para luego invertir la mayoría en bonos cuando están cercanos a pensionarse.

Un resultado *ex-post* del ejercicio empírico indica que entre 1980 y 2009, dados los resultados reales del mercado financiero, la mejor decisión para los individuos se encontraba en la inversión de sus portafolios con un mayor por-

centaje en acciones en el largo plazo, aún cuando la volatilidad de éstas fuera mayor a la de los bonos. Cabe anotar que éste resultado se mantiene para los individuos con distintos perfiles de ingreso (niveles de educación altos o bajos), por lo cual estas decisiones dependen más de los resultados del sistema financiero que del nivel de ingreso de los ahorradores. Así mismo, debido a la obligatoriedad del sistema de pensiones, es importante que además de la apertura de nuevas opciones para los afiliados – como el sistema de multifondos – éstas alternativas estén acompañadas de una completa orientación por parte de las administradoras de los fondos. Debido a que los resultados del mercado financiero inciden sobre las cuentas de los afiliados, el papel de los asesores es fundamental. De otro modo, incrementar las opciones puede acarrear pérdidas para los individuos en lugar de mejorar su bienestar.

Al utilizar los porcentajes históricos invertidos en acciones por el promedio de las AFP, se encuentra que, a pesar de que la restricción de inversión en activos de renta variable establecida por el Gobierno no se encuentra saturada (en el 30 %), el desempeño de las cuentas pensionales de los individuos se habría podido mejorar considerablemente si se hubiera invertido un mayor porcentaje en estos activos, de 1994 a 1998 y desde 2004 hasta 2009. Sin embargo, cabe resaltar que entre 1999 y 2003 los resultados con los porcentajes históricos de inversiones en renta variable (en promedio 4.8 %) fueron de los más altos que se podían obtener con las distintas combinaciones de exposición al riesgo, teniendo en cuenta la crisis financiera de 1999.

Al comparar los resultados con el régimen actual y las tres trayectorias en las cuales los individuos disminuían su exposición al riesgo con la edad, se encuentra que los individuos con una mayor disposición a asumir riesgo (trayectoria 1) obtienen mejores resultados al final del período que los individuos que invierten según las trayectorias 2 y 3. Incluso, los valores de las cuentas de pensión de los tres casos son mayores que los que se obtuvieron con el régimen actual, lo cual es un argumento adicional para la transición al sistema de multifondos.

Teniendo en cuenta que la reforma financiera estipula un incremento en el límite de inversiones en activos de renta variable, por parte de las AFP, los resultados anteriores podrían corroborar una posible mejora en los resultados de las cuentas de pensiones con una mayor participación de las acciones en los portafolios de pensiones obligatorias.

Por último, se encuentra que un efecto adicional de la transición al sistema de multifondos es que las AFP van a estar limitadas por las decisiones que tome el afiliado. En este sentido, la decisión sobre cual fondo elegir va a ser en mayor medida tomada por el individuo, y no por la Administradora de los Fondos. Esto sería lo opuesto al sistema actual en el cual la AFP puede decidir libremente en que activos invierte sin consultar con el afiliado.

## Referencias

- Acosta, O. Ayala, U. (2001). "Reformas fiscales y fondos pensionales en Colombia". CEPAL, Publicación N° 116.
- Ameriks, J., Zeldes, S. (2004). "How do Household Portfolio Shares Vary with Age?" *TIAA-CREF Working Paper*.
- Bodie, Z., Merton, R., Samuelson, W. (1992). "Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice in a Life-Cycle Model". NBER Working Papers 3954, National Bureau of Economic Research.
- Bravo, D. Vásquez, J. (2004). "Comportamiento manada en las Administradoras de Fondos de Pensiones". Documentos de Trabajo, Departamento de Economía, Universidad de Chile.
- Candelo, N. (2006) "El desafío intertemporal del ahorro voluntario en pensiones: un análisis macroeconómico desde la teoría del comportamiento". Documentos CEDE, Universidad de los Andes.
- Decretos Sistema Financiero y Sistema Pensional. 692 de 1994, 1141 de 1995, 1592 de 2004.
- Eckhoudt, L., Gollier, C., Schlesinger, H. (2005), "Economic and Financial Decisions under Risk". Princeton University Press.
- Hakansson, N. (1970). "Optimal Investment and Consumption Strategies under Risk for a Class of Utility Functions", *Econometrica* 38, 587 - 607.
- Herscovich, H. (2003) "La utilización de multifondos en el sistema de pensiones chileno – El caso CUPRUM". Universidad de San Andrés, Argentina.
- Iglesias, A. (2005). "Responsabilidad social de los mercados financieros: el rol de los fondos de pensiones". Presentación en la III Conferencia Interamericana sobre Responsabilidad Social de la Empresa (Organizada por el Banco Interamericano de Desarrollo, la Confederación de la Producción y el Comercio, y el Gobierno de Chile). Disponible en línea en: [[www.iabd.org/csramericas/2005/doc/presentaciones/Iglesias.ppt](http://www.iabd.org/csramericas/2005/doc/presentaciones/Iglesias.ppt)]
- Jagannathan, R., Kocherlakota, N. (1996). "Why Should Older People Invest Less in Stocks Than Younger People?", *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*. 20(3). 11 - 23.
- Kritzman, M., (1994). "What practitioners need to know About Time Diversification", *Financial Analysts Journal*, 50 (1), 14 - 18.
- Leibowitz, M., Langetieg, T. (1989). "Short risk and the asset allocation decision: A simulation analysis of stock and bond risk profiles". *The Journal of Portfolio Management*, 16(1), 61-68.
- Leland, E. H., 1968, Savings and uncertainty: the precautionary demand for saving, *Quarterly Journal of Economics*, 82, 465-473.
- Leyes Seguridad Social y Sistema de Pensiones, Ley 100 de 1993, 11 de 1998, 797 de 2003, 860 de 2005. Congreso de la República de Colombia.

Ley 1328 de 2009. “Por la cual se dictan normas en materia financiera, de seguros, del mercado de valores y otras disposiciones”. Congreso de la República de Colombia.

Malkiel, B. (1996). *A Random Walk Down Wall Street: a Life - Cycle Guide to Investing*, Norton, Nueva York.

Markowitz, H. (1952) “Portfolio Selection”, *The Journal of Finance*. 7(1), 77 - 91.

Merton, R. (1969). “Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous time case”, *Review of Economics Statistics*. 51, 247 - 257.

Mossin, J. (1968). “Optimal Multiperiod Portfolio Policies”, *Journal of Business*. 51, 215 - 229.

Poterba, J., Rauh, J., Venti, S., Wise, D. (2006). “Lifecycle Asset Allocation Strategies and the Distribution Retirement Wealth”. NBER Working Paper No. 11974.

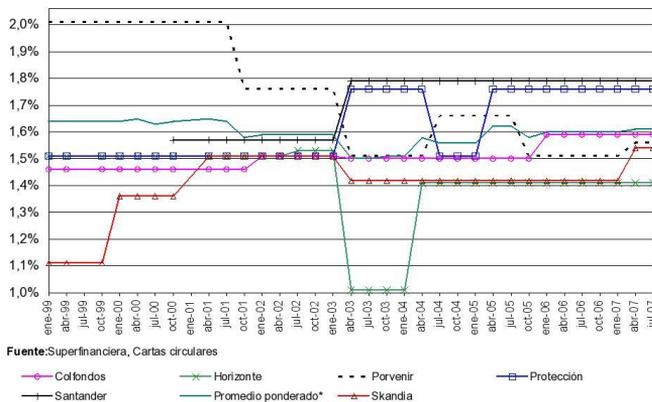
Rabelo, F. (2003) Comparative regulation of private pension plans, Conferencia sobre regulación y supervisión de pensiones en América Latina. OECD, AIOS, Superintendencia de Pensiones de Costa Rica.

Samuelson, P. (1989). “A Case At Last For Age-Phased Reduction In Equity”, *Proceedings of the National Academy of Science*, 86 (22), 9048-9051.

Walker, E (2006). “Optimal Portfolios In Defined Contribution Pension Systems”, *Abante*. 9(2). 99 - 129.

**Anexo 1**

**Valor de la comisión de administración de cada fondo.  
Enero 1999 a julio 2007**



## Anexo 2

### Mecanismos de cálculo de la Rentabilidad Mínima.

#### A. Decreto 1592 de 2004

$$r_{mt} = 0,7 \sum_1^6 r_{it} \gamma_{it} + 0,7 [\bar{\alpha}_t \Delta IGBC_t \bar{\beta}_t \Delta S \& P_t + (1 - \bar{\alpha}_t - \bar{\beta}_t)]$$

donde  $r_{mt}$  se refiere a la rentabilidad mínima obligatoria de los fondos de pensiones en el período  $t$ ;  $r_{it}$ , la rentabilidad promedio del fondo de pensiones  $i$ ;  $\gamma_{it}$ , la participación del fondo  $i$  sobre el valor total de los fondos de pensiones ( $\gamma_{it} \leq 20\%$ );  $\bar{\alpha}_t$ , la porción del portafolio de todos los fondos invertida en acciones de emisores nacionales;  $\Delta IGBC_t$ , el incremento porcentual del Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia, IGBC;  $\bar{\beta}_t$ , la porción del portafolio de todos los fondos invertida en acciones de emisores del exterior;  $\Delta S \& P_t$ , incremento porcentual del índice Standard and Poor's -  $S \& P - 500$ ; , la porción del portafolio de todos los fondos invertida en las demás inversiones;  $r_t^*$ , rentabilidad del portafolio de referencia.

B. Decreto 2664 de 2007 Modificó la metodología de cálculo de la rentabilidad mínima, estableciéndola como el valor mínimo valor entre:

- i El 70% del promedio simple de el promedio ponderado de las rentabilidades acumuladas efectivas anuales durante el período correspondiente, (donde  $r_{it}$ , es la rentabilidad promedio del fondo de pensiones  $i$ ; y  $\gamma_{it}$  es la participación del fondo  $i$  sobre el valor total de los fondos de pensiones, esta participación debe ser menor o igual al 20%); y la variación porcentual efectiva anual del  $IGBC_t$ , ponderado por el porcentaje  $\bar{\alpha}_t$ , que es igual a la porción del portafolio de todos los fondos invertida en acciones de emisores nacionales. La variación porcentual efectiva anual del índice representativo del mercado accionario del exterior,  $S \& P$ , ponderado por  $\bar{\beta}_t$ , la porción del portafolio de todos los fondos invertida en acciones de emisores del exterior. Y la rentabilidad acumulada efectiva anual del portafolio de referencia,  $r_t^*$ , ponderada por  $(1 - \bar{\alpha}_t - \bar{\beta}_t)$ , la porción del portafolio de todos los fondos invertida en las demás inversiones; rentabilidad del portafolio de referencia.
- ii El mismo cociente del numeral (i) menos 260 puntos básicos.

### Anexo 3

#### Desarrollo del modelo teórico.

A. Valor esperado y varianza de la riqueza del individuo en el período T

1. Valor esperado de la riqueza en T

$$\begin{aligned} W_T &= \theta\omega + \hat{W}_{T-1} (1 + r_t) \\ E[W_T] &= E[\theta\omega] + E[\hat{W}_{T-1} (1 + r_t)] \\ E[W_T] &= \theta\omega + \hat{W}_{T-1} + \hat{W}_{T-1} E[r_t] \\ E[W_T] &= \theta\omega + \hat{W}_{T-1} + \hat{W}_{T-1} (\lambda\omega^R + (1 - \lambda)r^L) \\ E[W_T] &= \theta\omega + \hat{W}_{T-1} + \lambda\omega^R \hat{W}_{T-1} + (1 - \lambda)r^L \hat{W}_{T-1} \end{aligned}$$

2. Varianza de la riqueza en T:

$$\begin{aligned} W_T &= \theta\omega + \hat{W}_{T-1} (1 + r_t) \\ Var[W_T] &= Var[\theta\omega] + Var[\hat{W}_{T-1} (1 + r_t)] \\ \text{Como } W_T &\text{ es conocida en } T: \\ Var[W_T] &= \hat{W}_{T-1}^2 Var[r_t] \\ Var[W_T] &= \hat{W}_{T-1}^2 \lambda^2 \sigma_R^2 \end{aligned}$$

B. Valor esperado de la función de utilidad CARA

Tomado de Eeckhoudt, Gollier y Schlesinger [2005]

Al hallar el valor esperado de las funciones de utilidad tipo CARA, caracterizadas por:

$$u(\omega) = \frac{e^{-a\omega}}{a}$$

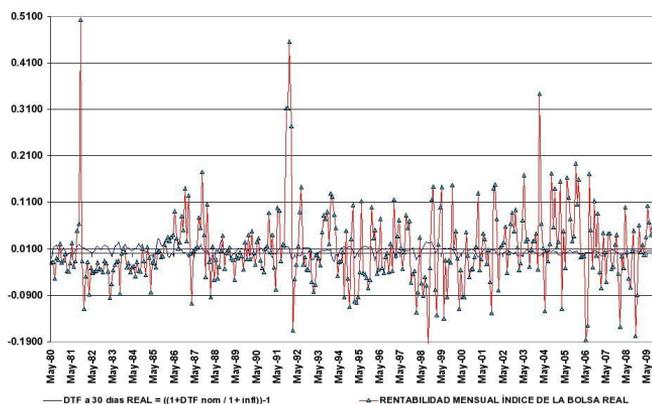
Donde  $a$  es un escalar positivo y representa la aversión absoluta al riesgo, encontramos:

$$\begin{aligned} Eu(\tilde{\omega}) &= \frac{-1}{\sigma a \sqrt{2\pi}} \int \exp(-a\omega) \exp\left(-\frac{(\omega - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) d\omega \\ &= \frac{1}{a} \exp(-a(\mu - 0,5a\sigma^2)) \left[ \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int \exp\left(-\frac{(\omega - 0,5a\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) d\omega \right] \\ &= \frac{1}{a} \exp(-a(\mu - 0,5a\sigma^2)) = u(\mu - 0,5a\sigma^2) \end{aligned}$$

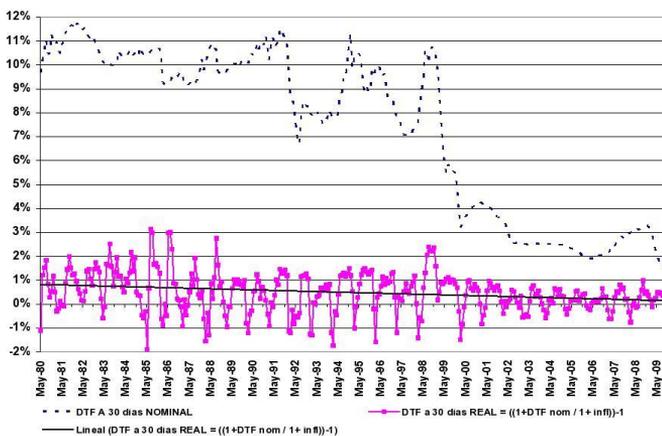
El resultado final proviene se obtiene dado que el término entre paréntesis [ ], es la integral de la densidad de la distribución normal  $N(\mu - 0,5a\sigma^2, \sigma)$ , que es igual a la unidad.

#### Anexo 4

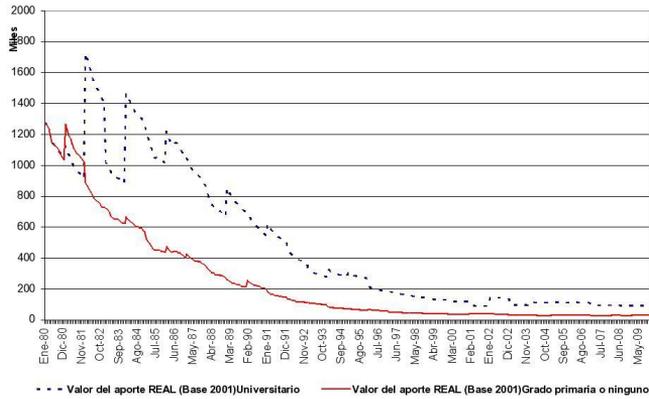
#### Panel A. DTF Real a 30 días vs. Rentabilidad del índice de la Bolsa 1980 - 2009



#### Panel B. DTF a 30 días, real vs. Nominal 1980 - 2009



**Panel C. Aportes de los individuos a sus cuentas de pensión,  
con niveles alto y bajo de educación.  
1980 -2009. (Base 2001)**



## Anexo 5

### Desarrollo del modelo teórico.

#### A.1. Descripción de las variables (frecuencia mensual)

$W_{2003}$  = Salario nominal por perfil de ingreso según la ECV (2003) para las distintas edades (desde 18 años en adelante)

$\theta_t$  = Porcentaje de aporte a la cuenta individual de pensiones.

$IPC_{(\text{jun. } 2001=100),t}$  = Índice de Precios al Consumidor.

$IBB_t$  = Índice de la Bolsa de Bogotá,  $t \in [1980 : 1, 2001 : 6]$

$IBM_t$  = Índice de la Bolsa de Medellín,  $t \in [1980 : 1, 2001 : 6]$

$IBO_t$  = Índice de la Bolsa de Occidente,  $t \in [1980 : 1, 2001 : 6]$

$IGBC_t$  = Índice General de la Bolsa de Colombia,  $t \in [2001 : 7, 2009 : 11]$

$VBB_t$  = Volumen total transado en la Bolsa de Bogotá  
(en millones de pesos),  $t \in [1980 : 1, 2001 : 6]$

$VBM_t$  = Volumen total transado en la Bolsa de Medellín  
(en millones de pesos),  $t \in [1980 : 1, 2001 : 6]$

$VBO_t$  = Volumen total transado en la Bolsa de Occidente  
(en millones de pesos),  $t \in [1980 : 1, 2001 : 6]$

$VGBC_t$  = Volumen total transado en la Bolsa de Colombia  
(en millones de pesos),  $t \in [2001 : 7, 2009 : 11]$

$DTF_t$  = Tasa de interés nominal de Depósito a Término Fijo a 30 días.  
 $t \in [1980, 2009]$

## A.2. Procedimiento

En primera instancia, se calcula el valor del aporte a la cuenta individual del pensionado en términos nominales como:  $\theta_t W_{2003}$ .

Para obtener la rentabilidad del portafolio, la cual depende a su vez de las rentabilidades de los activos riesgosos y libres de riesgo además de los porcentajes invertidos en cada uno, se necesita:

La rentabilidad de los activos riesgosos: como una aproximación a esta variable se utiliza la rentabilidad del mercado accionario de Colombia. El cual estaba compuesta por 3 Bolsas hasta junio de 2001 (Bolsa de Bogotá, Medellín y Occidente) y posteriormente por la Bolsa de Valores de Colombia.

Desde 1980 hasta 2001 se calcula un índice único de las 3 Bolsas ponderado por volumen transado,  $IBC_t$ , Índice de las Bolsas de Colombia, de la siguiente forma:

$$IBC_t = \frac{IBB_t VBB_t + IBM_t VBM_t + IBO_t VBO_t}{VBB_t + VBM_t + VBO_t}$$

Este índice es calculado en términos reales al deflactarlo por el  $IPC_t$ , así:

$$ibc_t = \frac{IBC_t}{IPC_t}$$

Su rentabilidad,  $r^R$ , es igual a la variación porcentual del índice mensual:

$$r_t^R = \Delta ibc_t = \left( \frac{ibc_t}{ibc_{t-1}} - 1 \right) \times 100 \quad t \in [1980 : 1, 2001 : 6]$$

Desde julio de 2001, entra en funcionamiento la Bolsa de Valores de Colombia y de igual forma que en el período anterior su índice,  $IGBC_t$  se deflacta por el  $IPC_t$  obteniendo el índice en términos reales,  $igbc_t$ , y su rentabilidad,  $r_t^R$ , también se calcula como la variación porcentual del índice mensual:

$$r_t^R = \Delta igbc_t = \left( \frac{igbc_t}{igbc_{t-1}} - 1 \right) \times 100 \quad t \in [2001 : 7, 2009 : 11]$$

La rentabilidad de los activos libres de riesgo: como aproximación a esta variable se calcula la variación porcentual de la DTF real:

$$dtf_{(real)t} = \left( \frac{1 + DTF_{(nominal)t}}{1 + \pi} - 1 \right)$$

Donde la inflación es igual a

$$\pi = \frac{IPC_t}{IPC_{t-1}} - 1$$

Y posteriormente se calcula su variación porcentual para obtener la rentabilidad de los activos libres de riesgo,  $r_t^L$ :

$$r_t^L = \Delta dtf_t = \left( \frac{dtf_t}{dtf_{t-1}} - 1 \right) \times 100 \quad t \in [1980 : 1, 2009 : 11]$$

Así, la rentabilidad del portafolio es una combinación lineal de la rentabilidad de los activos riesgosos y libres de riesgo de tal forma que:

$$r_T = \lambda r^R + (1 - \lambda) r^L$$

Donde las diferentes proporciones  $\lambda$  y  $(1 - \lambda)$  se tomaron según la tabla 2.

## Anexo 6

## Varianza de la rentabilidad de los fondos.

A.1. A. Rentabilidad anual promedio, y valor acumulado en pesos para cada fondo.

Fondo	Porcentaje invertido en renta variable (%)	Perfil de ingreso Universitario			Perfil de ingreso Educación básica		
		Rentabilidad anual promedio (%)	Varianza	Valor acumulado en pesos de la cuenta pensional	Rentabilidad anual promedio (%)	Varianza	Valor acumulado en pesos de la cuenta pensional
Porcentajes históricos	1980 – – 1994 = 2,7 1995 – – 2008 = 9						
A	80	26.05	0.64	609.515.682	23.44	0.69	343.062.447
B	60	34.10	0.69	1.394.171.232	31.26	0.75	695.299.007
C	40	31.05	0.64	1.176.409.192	28.29	0.70	606.906.835
D	20	28.54	0.62	940.491.955	25.86	0.68	501.499.940
E	No autorizado	26.59	0.62	711.181.485	23.96	0.68	390.990.448
A – B – C	(80 – – 60 – – 40)	25.19	0.64	507.567.235	22.58	0.70	286.427.441
B – C – D	(60 – 40 – 20)	<b>32.60</b>	<b>0.67</b>	1.272.279.538	<b>29.80</b>	<b>0.73</b>	635.593.523
C – D – E	(40 – 20 – N/A)	<b>29.70</b>	<b>0.63</b>	1.035.583.293	<b>27.00</b>	<b>0.69</b>	534.994.582
		<b>27.40</b>	<b>0.61</b>	798.335.993	<b>24.70</b>	<b>0.67</b>	426.148.038

B. Varianza en la rentabilidad de cada fondo. Individuo con educación universitaria

	Porcentajes históricos	80 %	60 %	40 %	20 %	0 %	A - B - C	B - C - D	C - D - E
5 años	2,71	2,61	2,62	2,65	2,68	2,72	2,61	2,62	2,65
10 años	1,55	1,44	1,45	1,47	1,51	1,56	1,44	1,45	1,47
15 años	1,09	1,1	1,05	1,04	1,05	1,1	1,1	1,05	1,04
20 años	0,84	0,9	0,84	0,82	0,82	0,84	0,89	0,83	0,81
25 años	0,68	0,73	0,68	0,66	0,66	0,69	0,71	0,67	0,65
Hasta 2008	0,64	0,69	0,64	0,62	0,62	0,64	0,67	0,63	0,61

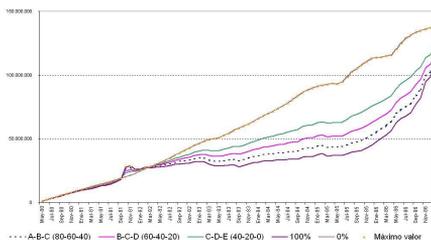
C. Varianza en la rentabilidad de cada fondo. Individuo con educación primaria

	Porcentajes históricos	80 %	60 %	40 %	20 %	0 %	A - B - C	B - C - D	C - D - E
5 años	3,12	3,06	3,07	3,08	3,1	3,13	2,06	3,07	3,08
10 años	1,73	1,64	1,65	1,66	1,69	1,74	1,64	1,65	1,66
15 años	1,2	1,23	1,17	1,16	1,17	1,2	1,23	1,17	1,16
20 años	0,92	0,98	0,92	0,90	0,90	0,92	0,97	0,92	0,89
25 años	0,74	0,80	0,75	0,72	0,72	0,75	0,78	0,74	0,72
Hasta 2008	0,69	0,75	0,7	0,68	0,68	0,70	0,73	0,69	0,67

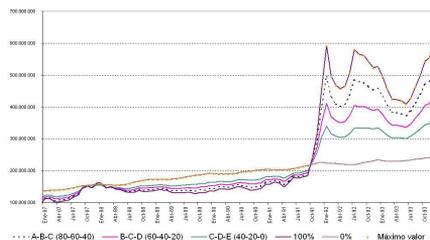
## Anexo 7

**Cuenta de pensión acumulada, individuo con educación universitaria y cotización.  
(Distintos porcentajes de inversión en renta variable, límites máximos).**

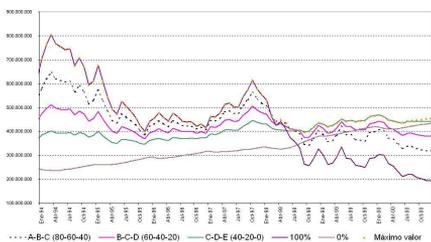
1980 – 1986



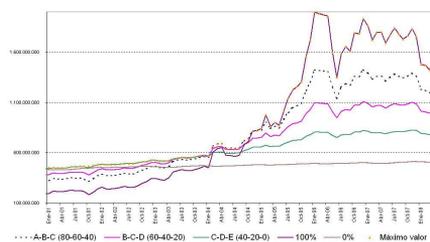
1987 – 1993



1994 – 2000



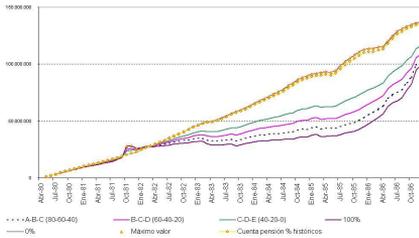
2001 – 2008



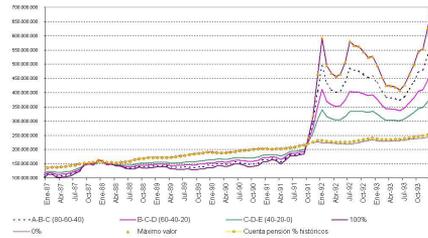
Anexo 8

Cuenta de pensión acumulada, individuo con educación universitaria y cotización.  
 (Distintos porcentajes de inversión en renta variable, límites máximos) vs. Valores históricos.

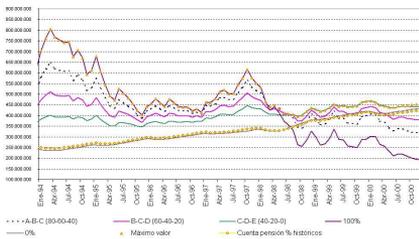
1980 – 1986



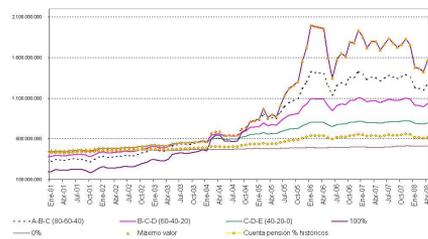
1987 – 1993



1994 – 2000



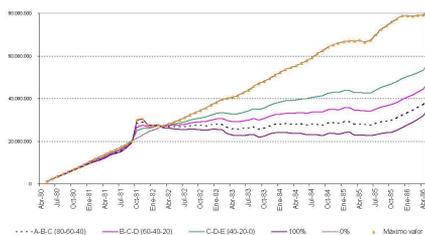
2001 – 2008



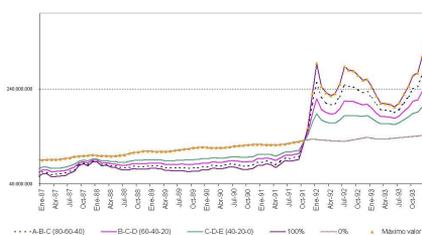
## Anexo 9

Cuenta de pensión acumulada, individuo con nivel básico de educación y cotización.  
(Distintos porcentajes de inversión en renta variable, límites máximos)

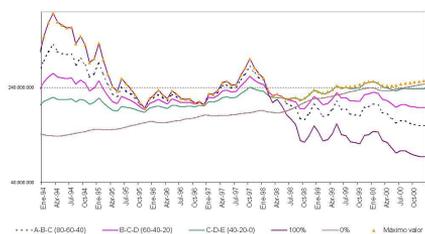
1980 – 1986



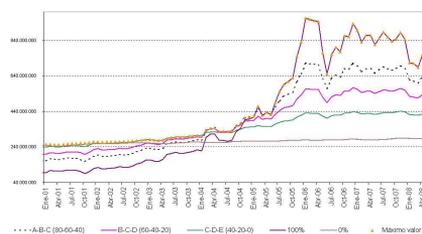
1987 – 1993



1994 – 2000



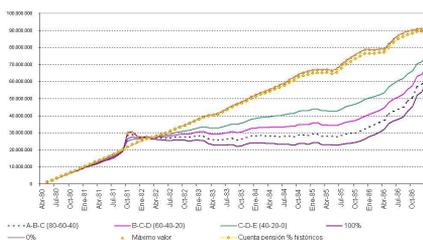
2001 – 2008



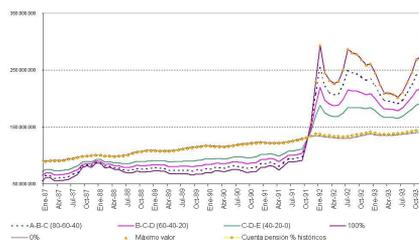
Anexo 10

Cuenta de pensión acumulada, individuo con nivel básico de educación y cotización. (Distintos porcentajes de inversión en renta variable, límites máximos). vs. Valores históricos

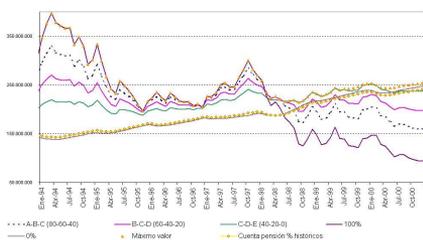
1980 – 1986



1987 – 1993



1994 – 2000



2001 – 2008

